NOM :
Prénom :

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010–2011
MÉCANIQUE QUANTIQUE
Interrogation n° 1 ***(durée 45 mn)***

Exercice I : Puits infini à une dimension

On considère une particule de masse m, soumise au potentiel :

$$\begin{array}{lcl} V(x) = 0 & \text{si} & 0 \leq x \leq a \\ V(x) = +\infty & \text{si} & x < 0 \text{ ou } x > a \end{array}$$

On appelle $|\varphi_n\rangle$ les états propres de l'hamiltonien H du système. On rappelle que les valeurs propres associées sont :

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

On donne l'état de la particule à l'instant $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle + a_3|\varphi_3\rangle + a_4|\varphi_4\rangle$$

I.1. Rappeler la relation qui doit être vérifiée par les quatre coefficients a_i si l'on veut que l'état $|\psi(0)\rangle$ soit de norme 1.

I.2. On mesure l'énergie de la particule dans l'état $|\psi(0)\rangle$. Quelle est la probabilité de trouver une valeur inférieure à $\frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$?

I.3. Quels sont la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie de la particule dans l'état $|\psi(0)\rangle$?

TSVP

I.4. Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t. Les résultats trouvés aux questions I.2 et I.3 restent-ils valables ? Dire pourquoi.

I.5. Lors d'une mesure de l'énergie, on trouve le résultat $\dfrac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$. Quel est l'état du système après la mesure ? Que trouve-t-on et avec quelle probabilité si on mesure à nouveau l'énergie ?

Exercice II : Théorème d'Ehrenfest pour une particule libre

On considère une particule libre à une dimension de masse m. A l'instant t, l'état est un ket $|\psi(t)\rangle$. On considère une observable A quelconque représentée par l'opérateur $\hat{A}$, et la valeur moyenne de cette observable est notée $\langle A\rangle(t)$.

II.1 Écrire la valeur moyenne $\langle A\rangle(t)$ en fonction de $\hat{A}$ et $|\psi(t)\rangle$.

II.2 Écrire l'équation de Schrödinger pour le ket $|\psi(t)\rangle$. On introduira l'opérateur $\hat{p}$ impulsion de la particule.

II.3 Calculer la dérivée $d\langle A\rangle/dt$. Montrer que l'on fait apparaître la valeur moyenne du commutateur de $\hat{A}$ et $\hat{p}^2$.

II.4 Appliquer le résultat précédent à $\hat{p}$ et $\hat{x}$, l'opérateur position. On rappelle qu'un commutateur de type $[A^2, B]$ est donné par $[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A$.

II.5 Montrer que l'on a $\langle p\rangle = p_0$ =Cste et $\langle x\rangle = p_0 t + x_0$, et donner l'expression de x_0 et p_0 en fonction de $\hat{x}$, $\hat{p}$, m et d'un ket que l'on précisera.

II.6 On applique maintenant le résultat de II.3 aux opérateurs $\hat{x}^2$ et $\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}$. On donne :

$$\begin{aligned}
[\hat{x}^2, \hat{p}^2] &= 2i\hbar(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \\
[(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), \hat{p}^2] &= 4i\hbar\hat{p}^2
\end{aligned}$$

Montrer que la dérivée seconde $d^2\langle x^2\rangle/dt^2$ est constante.

II.7 En déduire que l'écart quadratique moyen Δx est donné par :

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{m^2}(\Delta p)_0^2 t^2 + at + b$$

où $(\Delta p)_0^2$ est l'écart quadratique moyen de l'impulsion (on montrera que c'est une constante), et a et b sont des constante arbitraires. On rappelle que $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$.

II.8 En déduire qu'avec un choix convenable de l'origine des temps, l'écart quadratique moyen Δx est donné par :

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{m^2}(\Delta p)_0^2 t^2 + (\Delta x)_0^2$$

où $(\Delta x)_0^2$ est l'écart quadratique moyen à l'instant initial.